TEMA 6

TEORÍA DE RESIDUOS

1. Ceros y singularidades de una función

1.2 Ceros de una función

Definición Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un **cero** de una función f si $f \in \mathcal{H}(\{z_0\})$ y $f(z_0) = 0$. Si además verifica $f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ se dice que z_0 es un cero de f de **orden** $m \in \mathbb{N}$. Si $m = 1$, también se llama cero simple.
Se denota $C(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ es un cero de } f\}$.

Ejemplo 1. Si $f(z) = z \operatorname{sen} z \Longrightarrow C(f) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, con $z_0 = 0$ un cero de orden 2 y $z_k = k\pi$ cero simple $\forall k \neq 0$.

Proposición 1. (Caracterización de los ceros de orden m) Sea $f \in \mathcal{H}(\{z_0\})$. Se verifica: z_0 es un cero de orden m de f si y sólo si existen $R > 0$ y $g \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$, con $g(z_0) \neq 0$, tales que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Observación: El orden del cero de un polinomio $p(z)$ coincide con el de su multiplicidad como raíz de la ecuación $p(z) = 0$.

Ejemplo 2. Dada $f(z) = z^3 e^{z+1}$ se tiene que $C(f) = \{0\}$ y $z_0 = 0$ es un cero de orden 3 de f.

Proposición 2. Si z_0 es un cero de f, entonces f es nula en algún disco centrado en z_0 ó z_0 es un punto aislado del conjunto $C(f)$, es decir, $\exists R > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D^*(z_0, R)$.

1.2 Singularidades de una función

Definición. Una función f tiene una **singularidad** en $z_0 \in \mathbb{C}$, ó z_0 es un **punto singular** de f, si f no es holomorfa en z_0 pero $\forall R > 0$ existe $z_R \in D(z_0, R)$ tal que $f \in \mathcal{H}(\{z_R\})$. Se denota

$$S(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ es singularidad de } f\}.$$

Sea $z_0 \in S(f)$, se dice que z_0 es una **singularidad aislada** de f si $\exists R > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0, R))$, esto es, $z_0 \in I(S(f))$.

Ejemplo 3. Clasificación de singularidades en aisladas y no aisladas de las funciones:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$. **b)** $f(z) = \operatorname{Log} z$ **c)** $f(z) = \cot\left(\dfrac{\pi i}{z}\right)$.

Clasificación de las singularidades aisladas

Dada una función f, se tiene:

Si $z_0 \in I(S(f)) \Longrightarrow \exists R > 0$ t.q. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad \forall z \in D^*(z_0, R)$.

Entonces:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es la **parte regular** de f en z_0; define una función holomorfa en $D(z_0,R)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ es la **parte principal o singular** de f en z_0; informa del comportamiento de f cerca de z_0, permitiendo la clasificación:

i) Si $a_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow z_0$ es una **singularidad evitable** de f .

ii) Si $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $a_{-m} \neq 0$ y $a_{-n} = 0 \, \forall n > m \Longrightarrow z_0$ es un **polo de orden m** de f.

iii) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente} \\ \text{tal que } a_{-n_k} \neq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Longrightarrow z_0$ es una **singularidad esencial**.

Ejemplo 4. Clasificación de las singularidades aisladas de las funciones:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$. **b)** $f(z) = \frac{1}{z^2}$ **c)** $f(z) = e^{1/z}$.

Proposición 3. (Caracterización de singularidades evitables) Dada una función f, si $z_0 \in I(S(f))$ entonces son equivalentes:

i) z_0 es una singularidad evitable de f.

ii) Existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$ y es un número complejo.

iii) El módulo de f es acotado en un disco perforado de centro z_0.

Corolario 3.1 Si z_0 es singularidad evitable de $f \Longrightarrow \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ \lim_{z\to z_0} f(z) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$ es una función holomorfa en z_0.

Ejemplo 5. Dada $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$, $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de f.

Proposición 4. (Caracterización de polos de orden m) Dada un función f, si $z_0 \in I(S(f))$ son equivalentes:

i) z_0 es un polo de f de orden $m \in \mathbb{N}$.

ii) $\exists R > 0$ y $\exists g \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$ tales que $g(z_0) \neq 0$ y $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in D^*(z_0, R)$.

iii) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ y $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Corolario 4.1 (Caracterización de los polos) Dada una función f, si $z_0 \in I(S(f))$ se verifica:

$$z_0 \text{ es un polo de } f \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

Observación: Si z_0 polo de orden m de f y a_{-m} coeficiente de $(z-z_0)^{-m}$ en la serie de Laurent de f en torno a z_0, entonces

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m \\ a_{-m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n < m, \end{cases}$$

Ejemplo 6. Clasificación de singularidades aisladas:

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(2z-\pi)^2}$. **b)** $f(z) = \frac{\tan z}{z}$.

Proposición 5. (Caracterización de las singularidades esenciales: Teorema de Casorati-Weierstrass) Sean f una función y $z_0 \in I(S(f))$. Son equivalentes:

i) z_0 es una singularidad esencial de f.

ii) Para todo $R > 0$, $\overline{f(\mathrm{Dom}(f) \cap D^*(z_0, R))} = \mathbb{C}$.

iii) No existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Ejemplo 7. La función $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-\pi i}\right)$ tiene una singularidad esencial en $z_0 = \pi i$.

Teorema grande de Picard. z_0 es singularidad esencial de una función f si y sólo si la imagen por f de cada disco perforado de centro z_0 es todo $\mathbb{C}$, salvo quizás una única excepción, y cada valor es alcanzado por f infinitas veces.

1.3 Relaciones entre ceros y singularidades

Ceros, singularidades evitables y polos

Proposición 6. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\{z_0\})$ tales que $f_1(z_0) \neq 0$. Entonces, z_0 es un cero de orden m de f_2 si y sólo si z_0 es un polo de orden m de f_1/f_2.

Corolario 6.1 Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y una función f, se verifica:

1. Si z_0 cero de orden m de $f \Longrightarrow z_0$ polo de orden m de $1/f$.
2. Si z_0 polo de orden m de $f \Longrightarrow z_0$ singularidad evitable de $1/f$.La extensión holomorfa de $1/f$ a z_0 tiene un cero de orden m en z_0.

Ejemplo 8. Clasificación de las singularidades de $f(z) = \frac{\tan z}{(4z-\pi)^2 z}$.

Aplicación: Singularidades de las funciones racionales

Si $p(z)$ y $q(z)$ polinomios y $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \Longrightarrow S(f) = C(q)$. Sea $z_0 \in C(q)$ de orden m, se verifica:

1. Si $p(z_0) \neq 0 \Longrightarrow z_0$ polo de orden m de f.
2. Si $z_0 \in C(p)$ con orden $n \Longrightarrow z_0 \begin{cases} \text{singularidad evitable de } f & \text{si } n \geq m \\ \text{polo de orden } m-n \text{ de } f & \text{si } n < m \end{cases}$

Ejemplo 9. Clasificación de las singularidades de $f(z) = \frac{z^3-(1+2i)z^2+(2i+3)z-3}{(z-1)(z^2+9)^2}$.

Ceros y singularidades esenciales

Proposición 7. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ y $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0, R))$ no idénticamente nula. Si z_0 es un punto de acumulación de ceros de f, entonces z_0 es una singularidad esencial de f.

Ejemplo 10. El punto $z_0 = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}$.

1.3 Singularidades y el punto del infinito

Definición. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R))$, para algún $R > 0$, y sea $f_{\mathcal{I}} = f \circ \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es la inversión $\mathcal{I}(z) = 1/z$. Entonces:

1. f es **holomorfa en** ∞ si $z_0 = 0$ es una singularidad evitable de $f_{\mathcal{I}}$.
2. ∞ es un **polo de orden** m de f si $z_0 = 0$ es un polo de orden m de $f_{\mathcal{I}}$.
3. ∞ es una **singularidad esencial** de f si $z_0 = 0$ es una singularidad esencial de $f_{\mathcal{I}}$.

Observación: Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R))$ y su desarrollo en serie de Laurent en $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R)$ es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{-n}}{z^n}$ si $|z| > R$, entonces

- Si $a_n = 0\, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f$ es holomorfa en ∞.
- Si $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \neq 0$ y $a_n = 0\, \forall n > m \Longrightarrow \infty$ es un polo de orden m de f.
- Si $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $a_{n_k} \neq 0\, \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \infty$ es una singularidad esencial de f.

Ejemplo 11.

a) $f(z) = \frac{iz+1}{z-1}$ es holomorfa en ∞.
b) ∞ es un polo simple de $f(z) = \frac{z^2-i}{3z+2}$.
c) ∞ es un polo de orden 3 de $f(z) = z^3 + 2z - i$.
d) ∞ es una singularidad esencial de $f(z) = \operatorname{sen} z$.

2. Residuos

2.1 Residuo de una función en un punto

Definición. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de una función f, se llama **residuo de f en z_0**, y se denota $\operatorname{Res}(f; z_0)$, al coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent de f en torno a z_0, esto es, en un disco perforado de centro z_0.

Ejemplo 12. Dada $f(z) = e^{1/z^2}$, se tiene $\operatorname{Res}(f; 0) = a_{-1} = 0$.

Proposición 8. Si z_0 es una singularidad aislada de f se verifica

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

donde Γ es un contorno simple, cerrado y positivamente orientado tal que $z_0 \in \operatorname{Int}(\Gamma)$ y $f \in \mathcal{H}(\overline{\operatorname{Int}(\Gamma)} \setminus \{z_0\})$.

Ejemplo 13. Dada $f(z) = \frac{e^z}{z-\pi i}$, si Γ es un contorno simple, cerrado y positivamente orientado tal que $\pi i \in \operatorname{Int}(\Gamma)$, se tiene

$$\operatorname{Res}(f;\pi i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^z}{z-\pi i}dz = -1.$$

Observación: La teoría de residuos es útil para el cálculo de integrales de contorno. Por ejemplo, si Γ es un contorno simple, cerrado y positivamente orientado tal que $0 \in \operatorname{Int}(\Gamma)$ entonces

$$\int_\Gamma e^{1/z^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;0) = 0.$$

La proposición 8 permite extender la definición de residuo de una función al punto ∞.

Definición. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,R))$, para algún $R > 0$, se define el **residuo de f en el punto ∞**, y se denota $\operatorname{Res}(f;\infty)$, como el número complejo

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz,$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,R)$ es un contorno simple, cerrado y positivamente orientado tal que $0 \in \operatorname{Int}(\Gamma)$.

Ejemplo 14. Dada $f(z) = \dfrac{e^z}{z-\pi i}$, si C_R es la circunferencia de centro el origen y radio $R > \pi$ recorrida una vez en sentido positivo

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{e^z}{z-\pi i}dz = 1.$$

Nótese que $\operatorname{Res}(f;\infty) = -\operatorname{Res}(f;\pi i)$.

Observación: Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Longrightarrow \operatorname{Res}(f;\infty) = 0$.

Proposición 9. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,R))$, con $R > 0$, se verifica:

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right);0\right).$$

Ejemplo 15. Cálculo del residuo de $f(z) = e^{1/z}$ en ∞ mediante el residuo de la función $\dfrac{1}{z^2}f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{e^z}{z^2}$ en $z_0 = 0$.

2.2 Cálculo de residuos

Proposición 10. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ singularidad aislada de una función f. Se verifica:

1. Si z_0 es singularidad evitable $\Longrightarrow \operatorname{Res}(f,z_0) = 0$.
2. Si z_0 es polo simple $\Longrightarrow \operatorname{Res}(f,z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.
3. Si z_0 es polo de orden $m > 1 \Longrightarrow \operatorname{Res}(f,z_0) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z))$.

Preposición 11. Si $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ siendo $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\{z_0\})$ tales que $f_1(z_0) \neq 0$, $f_2(z_0) = 0$ y $f_2'(z_0) \neq 0$, entonces z_0 es un polo simple de f cuyo residuo es

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)}.$$

Ejemplo 16. Cálculo de los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades.

a) $f(z) = \dfrac{iz+1}{z-1}$. **b)** $f(z) = \dfrac{z^3-(1+2i)z^2+(2i+3)z-3}{(z-1)(z^2+9)^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{\tan z}{(4z-\pi)^2 z}$. **d)** $f(z) = \dfrac{z^2+\pi^2}{e^z+1}$.

Teorema de Cauchy de los residuos. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contorno simple, cerrado y positivamente orientado. Si $z_1, \ldots, z_n \in \text{Int}(\Gamma)$ son singularidades de una función f y $f \in \mathcal{H}\left(\overline{\text{Int}(\Gamma)} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}\right)$, entonces

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k).$$

Ejemplo 17. Aplicación al cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int_\Gamma \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz$, donde Γ es la circunferencia centrada en 0 y radio 2 recorrida una vez en sentido positivo.

b) $\int_\Gamma \frac{z^2+\pi^2}{e^z+1} dz$, donde Γ es la circunferencia centrada en 0 y radio 4π recorrida una vez en sentido positivo.

Corolario. Si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ singularidades de f tal que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$. Se verifica

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0.$$

Ejemplo 18. Cálculo del residuo de $f(z) = \dfrac{iz+1}{z-1}$ en ∞.

3. Lemas de Jordan

Lema 1. Sean $R_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $R_0 > 0$ y $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Si f es una función definida y continua en el sector $S(R_0, \theta_1, \theta_2) = \{Re^{it} : R \geq R_0 \ \wedge\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2\}$ tal que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = w_0$, entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} f(z)dz = iw_0(\theta_2 - \theta_1),$$

donde $C_R(\theta_1, \theta_2)$ es el arco de la circunferencia positivamente orientada con centro $z_0 = 0$ y radio R comprendido en el sector $S(R_0, \theta_1, \theta_2)$.

Lema 2 (Lema de Jordan).
Sean $a, R_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a > 0$, $R_0 > 0$ y $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$. Si f es una función definida y continua en el sector $S(R_0, \theta_1, \theta_2) = \{Re^{it} : R \geq R_0 \ \wedge\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2\}$ tal que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} f(z)e^{iaz}dz = 0,$$

donde $C_R(\theta_1, \theta_2)$ es el arco de la circunferencia positivamente orientada con centro $z_0 = 0$ y radio R comprendido en el sector $S(R_0, \theta_1, \theta_2)$.

Nota: El lema también se verifica si $-\pi \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 0$ y $a < 0$.

Lema 3.
Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $R_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $R_0 > 0$ y $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Si f es una función definida y continua en el sector $S(z_0; R_0, \theta_1, \theta_2) = \{z_0 + re^{it} : 0 < r \leq R_0 \ \wedge\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2\}$ tal que $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = w_0$, entonces

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r(z_0;\theta_1,\theta_2)} f(z)dz = iw_0(\theta_2 - \theta_1),$$

donde $C_r(z_0; \theta_1, \theta_2)$ es el arco de la circunferencia positivamente orientada con centro z_0 y radio r comprendido en el sector $S(z_0; R_0, \theta_1, \theta_2)$.